Vzorová písemka

1 část

1. Určete hodnotu diferenciálu funkce $f(x) = \ln x$ v bodě 1 odpovídající přírustku proměnné x rovnému $-0,1$.
Diferenciál:

$$\mathrm{d}f = f'(x_0) \cdot h$$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \qquad h = -0,1$$

$$\mathrm{d}f = 1 \cdot (-0,1) = -0,1$$

2. Udejte příklad funkce, která je mnohočlenem čtvrtého stupně a jejíž Taylorův mnohočlen třetího stupně se středem v bodě -2 má tvar $3 + (x + 2)^2$. Pokud takový příklad neexistuje, vysvětlete proč.

$$T_n = 3 + (x + 2)^2 \Rightarrow f(-2) = 3 \qquad f'(-2) = 0 \qquad f''(-2) = 2 \qquad f'''(-2) = 0$$

$$f:\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f':\ 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f'':\ 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$f''':\ 24ax + 6b$$

V dalším hned zvolím $a = 1$, protože mi jde o příklad.

$$\begin{aligned}
f'''(-2):&\ +48a + 6b = 0 &\Rightarrow&\quad b = 8\\
f''(-2):&\ 48a - 12b + 2c = 2 &\Rightarrow&\quad c = 25\\
f'(-2):&\ -32a + 12b - 4c + d = 0 &\Rightarrow&\quad d = 36\\
f(-2):&\ 16a - 8b + 4c - 2d + e = 3 &\Rightarrow&\quad e = 23
\end{aligned}$$

Příklad:

$$f:\ x^4 + 8x^3 + 25x^2 + 36x + 27$$

3. Určete koeficienty u mocniny x^{15} v Maclaurinových vzorcích pro dvě funkce $f(x) = \sin(x^3)$ a $g(x) = x^7 \cos 2x$ (v odpovědích mohou vystupovat faktoriály).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin(x^3) = (x^3) - \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^5}{5!} - \dots = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \dots$$

koeficienty u mocniny x^{15} je tedy:

$$\frac{1}{5!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} - \dots = 1 - \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{2^6 \cdot x^6}{6!} + \frac{2^8 \cdot x^8}{8!} - \dots$$

$$x^7 \cos 2x = x^7 - \frac{2^2 \cdot x^9}{2!} + \frac{2^4 \cdot x^1 1}{4!} - \frac{2^6 \cdot x^1 3}{6!} + \frac{2^8 \cdot x^1 5}{8!} - \dots$$

koeficienty u mocniny x^{15} je tedy:

$$\frac{2^8}{8!}$$

4. K funkci $f(x) = x^2$ sestavte horní a dolní integrální součet na intervalu $\langle -2; 2\rangle$ pro dělení tvořené všemi celými čísly z daného intervalu.

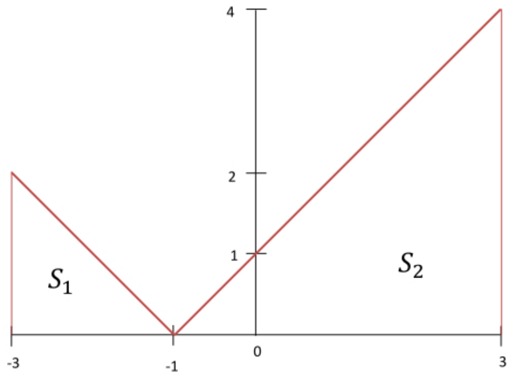
Délka všech těchto intervalů je 1, takže definiční sumy pro integrální součty bodou sčítat jen čísla m_i a M_i (vynásobené 1).
Pro horní součet hledáme největší hodnoty na dělících intervalech:
na $\langle -2, -1\rangle$ v -2 je to 4
na $\langle -1, 0\rangle$ v -1 je to 1
na $\langle 0, 1\rangle$ v 1 je to 1
na $\langle 1, 2\rangle$ ve 2 je to 4
Horní součet $S = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$

Pro dolní součet hledáme nejmenší hodnoty:
na $\langle -2, -1\rangle$ v -1 je to 1
na $\langle -1, 0\rangle$ v 0 je to 0
na $\langle 0, 1\rangle$ v 0 je to 0
na $\langle 1, 2\rangle$ ve 1 je to 1
Dolní součet $s = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$

5. Udejte příklad funkce f integrovatelné na intervalu $\langle 1, 4\rangle$ pro kterou zároveň platí $\int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x = 4$ a $\int_3^4 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \langle 1, 3\rangle \\ 5 & x \in (3, 4\rangle \end{cases}$$

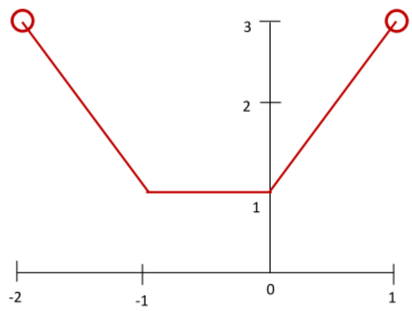
6. Hodnotu integrálu $\int\limits_{-3}^{3} |x+1| \, \mathrm{d}x$ určete bez integrování tak, že načrtnete graf integrované funkce a pak využijete geometrický význam integrálu z funkce.



$$S_1 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \qquad S_2 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$\int\limits_{-3}^{3} |x+1| \, \mathrm{d}x = S_1 + S_2 = 2 + 8 = 10$$

7. Rozhodněte, zda k funkci $f(x) = |x| + |x+1|$ existuje na intervalu $(-2, 1)$ primitivní funkce. (Nestačí napsat ano či ne, ale také proč.)



f je na $(-2, 1)$ spojitá $\Rightarrow$ existuje k ní tedy na $(-2, 1)$ primitivní funkce.

8. K funkci $f: \; y = \sqrt{x^4 - x^2}$ vypočtěte primitivní funkci na $(1, +\infty)$.

$$\int \sqrt{x^4 - x^2} \, \mathrm{d}x = \int x\sqrt{x^2-1} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} u & = & x^2 - 1 \\ \mathrm{d}u & = & 2x\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

9. Zapište jedním integrálem obsah rovinného útvaru, který je omezen částmi křivek $y = x^2$ a $x = y^2$ (integrál nepočítejte).

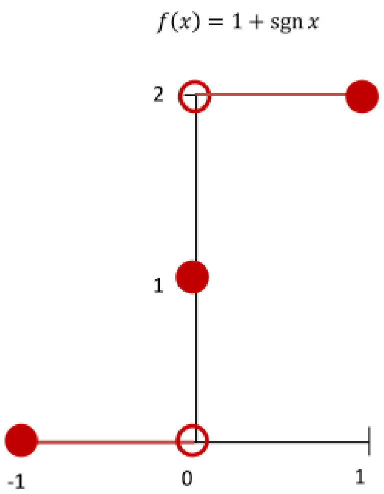
$$y = x^2 \qquad y = \sqrt{x} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

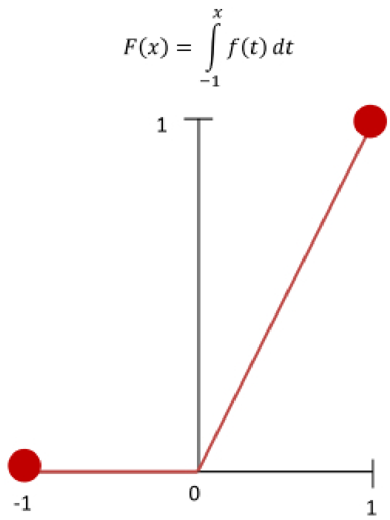
$$S = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\ \mathrm{d}x$$

10. Načrtněte grafy funkcí f a F na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ určených pro každé x rovnostmi

$$f(x) = 1 + \operatorname{sgn}(x), F(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Je funkce F primitivní k f na $(-1, 1)$?





$$F'_-(0) = 0 \ \wedge \ F'_+(0) = 2 \Rightarrow F'(0) \text{ neexistuje, ale } f(0) = 1$$

F tedy není primitivní k funci f na $(-1, 1)$

2 část

1. Vypočtěte

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = (*)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+3^2} = \left| \begin{array}{rcl} u & = & x+1 \\ \mathrm{d}u & = & \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}x}{u^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}$$

$$(*) = \frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10) - \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + c$$

2. Vypočtěte

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

a výsledek určete na dvě desetinná místa pomocí hodnot $\pi \doteq 3,14$ a $\sqrt{3} \doteq 1,73$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} t^2 & = & \frac{1-x}{1+x} \\ x & = & \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x & = & \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 0 & \to & 1 \\ \frac{1}{2} & \to & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - 4\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = (*)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = J_2(t,1) = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$$

$$(*) = 4\left[\operatorname{arctg} t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} - 4\left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) - 4\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi - 6 + 3\sqrt{3}}{6} \doteq 0,39$$

3. Určete objemy dvou těles v $\mathbb{R}^3$ s plášti vzniklými rotací křivky $y = x^2$, $x \in \langle 0,1\rangle$
a) kolem osy x, b) kolem osy y
a)

$$V = \pi\int_0^1 (x^2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

b) $x = \sqrt{y}$, $y \in \langle 0,1\rangle$

$$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$